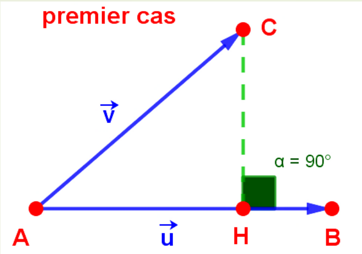
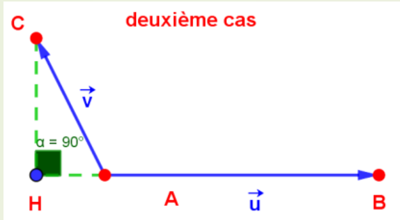
I. Produit scalaire dans l'espace :

a. Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace $(\mathscr{E})$; A et B et C trois points de $(\mathscr{E})$ tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; H est la projection de C sur la droite (AB) .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté par $\vec{u}.\vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ tel que :

1ER cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ 	2ième cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ 

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ on a $\vec{u}.\vec{v}=0$

b. Remarques :

- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on note : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$.
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire) $\Leftrightarrow|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

c. Propriétés :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$; $\alpha\in\mathbb{R}$ on a :

1. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
3. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2\geq 0$.
4. Non dégénère : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$
5. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases}\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}\\ \left(\vec{v}+\vec{w}\right).\vec{u}=\vec{v}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{u}\\ \vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right)=\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v}=\alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)\end{cases}$
6. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ et $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ et $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

d. Application :

Soit $ABCD$ un tétraèdre de faces régulières (chaque face est un triangle équilatéral de coté a pour longueur

- Montrer que deux cotés opposés sont orthogonaux (exemple le coté opposé de $[AB]$ est le coté $[DC]$.

Correction :

On montre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

On a :

✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}\ (1)$.

✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}\ (2)$.

✓ D'où :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\\&=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\&=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\quad (\text{ d'après } (1) \text{ et } (2)).\end{aligned}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

Conclusion : $(AB)\perp(CD)$. (De la même façon on démontre que : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$)

II. Base et repère orthonormé :

a. Rappel :

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté a une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$
$$=(xy'z''-xz'y'')+(-yx'z''+yz'x'')+(zx'y''-zy'x'')$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$.

b. Exemple :

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$ on a :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=1\times0-2\times(-7)+3\times0=14$$

D'où : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\neq 0$

Conclusion :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires donc le triplet $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$.
- On prend un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplet $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est un repère de l'espace $(\mathscr{E})$.

c. Technique :

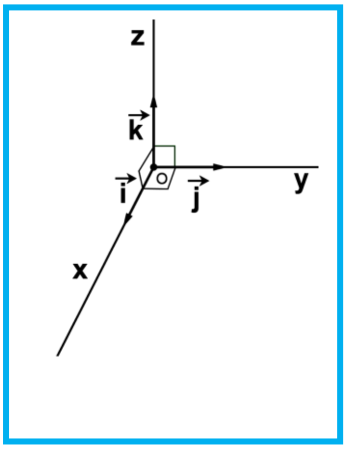
$$\begin{array}{ccccccccc} & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{u} & \vec{v} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

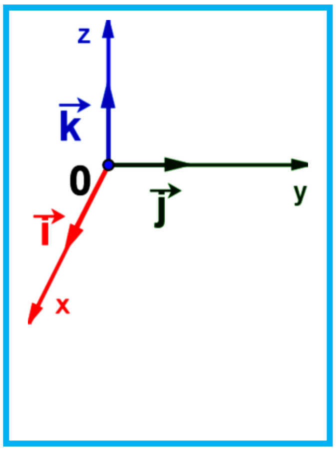
$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix}=(1)+(2)+(3)-(4)-(5)-(6)$$

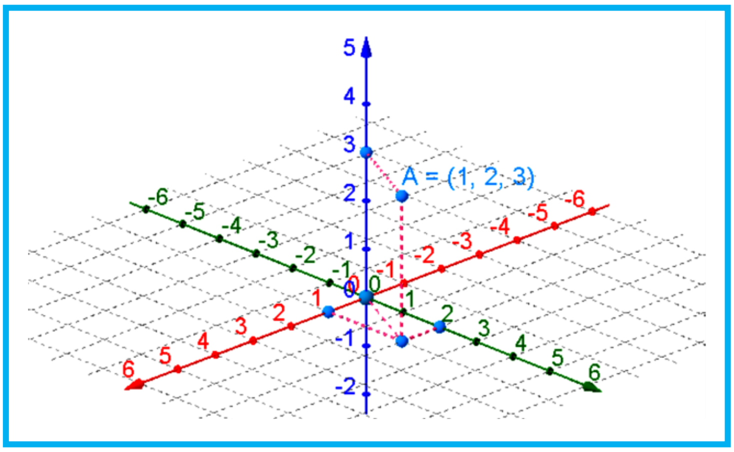
$$(4)\ (5)\ (6) \qquad (1)\ (2)\ (3)$$

d. Définitions :

- $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$ équivaut à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaire $\left(\det\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\neq 0\right)$
- Prenons un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est appelé repère de $(\mathscr{E})$
- Si $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ et $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ alors :
  - ❖ la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base orthonormée .
  - ❖ le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé .







- Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
- On prend $\vec{u}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}(x',y',z')=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ et $M(x,y,z)$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$.

III. Expression analytique de $\vec{u}.\vec{v}$

a. Activité :

1. On a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$ on utilise la linéarité du produit scalaire donner $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x et y et z et x' et y' et z'.
2. Ecrire $\left\|\vec{u}\right\|$ en fonction de x et y et z.
3. Donner la distance $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ en fonction de x_A et y_A et z_A et de x_B et y_B et z_B .
4. Donner la propriété .

b. Propriété :

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$.
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- La distance AB est : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

c. Application :

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(5,7,4)$ deux vecteurs et $A(1,5,7)$ et $B(2,9,8)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. Calculons : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\left\|\vec{u}\right\|$ et $\left\|\vec{v}\right\|$ et AB .

Correction : Calculons :

✓ $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}=1\times5+2\times7+3\times4=31$.

✓ $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{5^2+7^2+4^2}=\sqrt{88}$.

✓ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\9-5\\8-7\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ d'où : $AB=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}$.

Conclusion : $\vec{u}.\vec{v}=31$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{14}$ et $\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{88}$ et $AB=\sqrt{18}$.

IV. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k$ avec $\vec{u}(a,b,c)$; $\left(\vec{u}\neq\vec{0}\right)$:

a. Propriété :

$A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ est un point et $\vec{u}(a,b,c)$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ et $k\in\mathbb{R}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ est un plan (P) d'équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$.

b. Application :

Soient $A(1,1,1)$ et $\vec{u}(0,1,0)$.

1. On détermine (P) ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

Correction :

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$$

On a :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 0.(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow y-1=0$$

Conclusion : ensemble des points $M(x,y,z)$ de $(\mathcal{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$ est le plan d'équation (P) : $y=1$.

V. Plan déterminer par un point et un vecteur normal :

01. Vecteur normal à un plan :

a. Définition :

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P).

b. Remarques :

- $\vec{n}$ est normale au plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ alors $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$.
- Si $\vec{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A,\vec{n})$.

02. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$:

a. Propriété :

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est le plan et le vecteur non nul $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à ce plan.

b. Application :

- Que représente l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $x+2y-z+4=0$.

Repense : l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ est le plan (P) tel que :

- ✓ le vecteur $\vec{n}(1,2,-1)$ est normal à (P).
- ✓ le plan (P) passe par le point $A(0,0,4)$.
- ✓ donc $(P)=P(A,\vec{n})$.

03. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$:

a. Propriété :

$\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$ est un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan (P) qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan (c.à.d. $P(A,\vec{n})$) .

Le plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

b. Application :

On détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(2,1,-3)$ et $\vec{n}(1,1,2)$ est un vecteur normal à (P) .

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

On a : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\times 1 + (y-1)\times 1 + (z+3)\times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+2z+3=0$$

Conclusion : équation cartésienne de (P) est (P) : $x+y+2z+3=0$.

c. Propriété :

tout plan $P(A,\vec{n}(a,b,c))$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ la réciproque avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

d. Preuve :

On montre que : le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan (P) .

On a : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \ ; (1)$

$A(x_0,y_0,z_0) \in (P) \Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0 \ ; (2)$

La différence entre (1) et (2) on obtient :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

D'où : $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan .

e. Application :

1. On donne l'équation du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ et le point $A(0,0,m)$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1ère méthode :

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{i} \text{ et } \vec{j} \text{ sont coplanaires}\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{i},\vec{j}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0\\ y-0 & 0 & 1\\ z-m & 0 & 0\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow x\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+(z-m)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow 0-0+(z-m)=0\\
&\Leftrightarrow z-m=0
\end{aligned}
$$

Conclusion : équation du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est $P(O,\vec{i},\vec{j})$: $z=m$.

2ième méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ donc équation de $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est de la forme $0\times x+0\times y+1\times z+d=0$ ou encore $z+d=0$

On sait que : $A(0,0,m)\in P(O,\vec{i},\vec{j}) \Leftrightarrow m+d=0$ donc $d=-m$.

Conclusion : équation du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est $P(O,\vec{i},\vec{j})$: $z=m$.

3ième méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z)\in(P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{k}=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0\\ y-0\\ z-m\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x-0)\times 0+(y-0)\times 0+(z-m)\times 1=0\\
&\Leftrightarrow z-m=0
\end{aligned}
$$

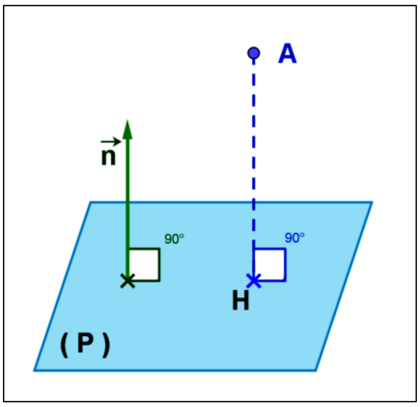
Conclusion : équation du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est $P(O,\vec{i},\vec{j})$: $z=m$.

VI. Distance d'un point à un plan :

a. Définition :

(P) est un plan et A est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ et H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) la distance du point A au plan (P) est AH et on note $AH=d(A,(P))$.

b. Exemple :



c. Propriété :

(P) est un plan et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que (P) a pour équation (P) : $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point A au plan (P) est $AH = d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

d. Preuve :

On considère $H(x_H, y_H, z_H)$ H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) .

- On sait que : le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan (P) ($\vec{n} \perp (P)$) (1)
- H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) donc $\overrightarrow{AH} \perp (P)$. (2)
- $H \in (P) \Leftrightarrow ax_H + by_H + cz_H + d = 0$; donc : $ax_H + by_H + cz_H = -d$.
- D'après (1) et (2) on obtient $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires , d'où $\left|\cos\left(\overrightarrow{AH}, \vec{n}\right)\right| = 1$ et

$$\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\|\left|\cos\left(\overrightarrow{AH}, \vec{n}\right)\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \text{ on obtient } \left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \quad (4)$$

- D'autre part : le produit scalaire est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}.\vec{n} &= \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) \\ &= ax_A + by_A + cz_A - \left(\underbrace{ax_H + by_H + cz_H}_{-d}\right) \\ &= ax_A + by_A + cz_A + d\end{aligned}$$

D'où : $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = |ax_A + by_A + cz_A + d| \quad (3)$

D'après (3) et (4) on obtient $AH\left\|\vec{n}\right\| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$. D'où : $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\left\|\vec{n}\right\|}$.

e. **Application :**

On considère le plan d'équation $(P)x+3y-5z+1=0$.

1. Est –ce que : $A(1,1,1)\in(P)$

   On a : $(P)1+3\times1-5\times1+1=4-5+1=0$ d'où : $A(1,1,1)\in(P)$

2. Donner la distance $d(A,(P))$

   1ère méthode :

   ✓ Puis que $A(1,1,1)\in(P)$ donc la projection orthogonale de A sur le plan (P) est $A=H$

   Donc $AH=AA=0$ donc $d(A,(P))=0$.

   Conclusion : la distance $d(A,(P))=0$.

   2ième méthode :

   ✓ On applique la propriété :

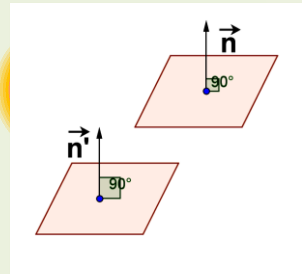
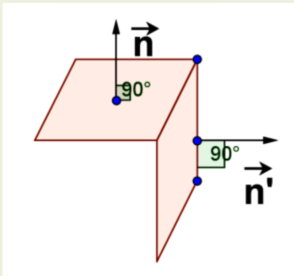
$$AH=d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\left|\frac{1+3\times1-5\times1+1=4-5+1}{\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}}\right|=\left|\frac{0}{35}\right|=0$$

   Conclusion : la distance $d(A,(P))=0$

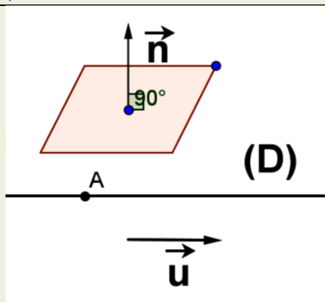
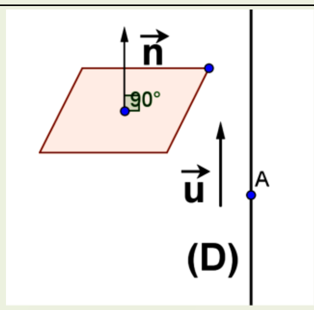
VII. Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans :

01. Parallélisme et orthogonalité de deux plans :

a. **Propriétés :**

$(P_1):ax+by+cz+d=0$ et $(P_2):a'x+b'y+c'z+d'=0$		
$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires) $(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (non nuls) $(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ($\vec{n}$ et $\vec{n}'$)	$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow \vec{n}'=\alpha\vec{n}$  	$(P_2)\perp(P_1)\Leftrightarrow \vec{n}'.\vec{n}=0$ 

02. Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan :

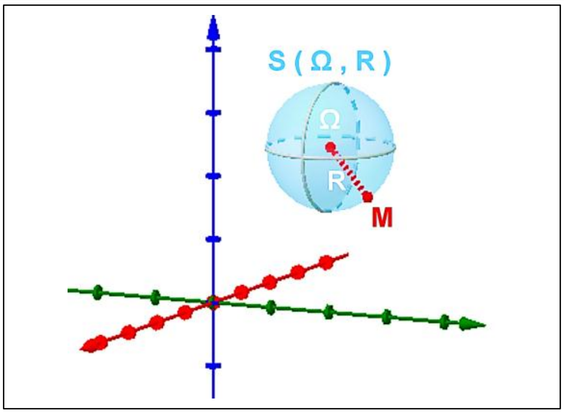
$P(B,\vec{n})$ et $D(A,\vec{u})$ et $(P):ax+by+cz+d=0$		
$(D)\parallel(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0$ $(D)\perp(P)\Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)	 	

VIII. Etude analytique du sphère :

01. Sphère :

a. Définition :

Ω est un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et $R > 0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R on note (S) ou $S(\Omega,R)$.



02. Equation cartésienne d'une sphère :

a. Définition propriété :

Equation cartésienne de $(S)=S(\Omega(a,b,c),r)$ est : $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \Omega M = R$ ou $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$ ou bien : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

b. Application :

On donne l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0),1)$

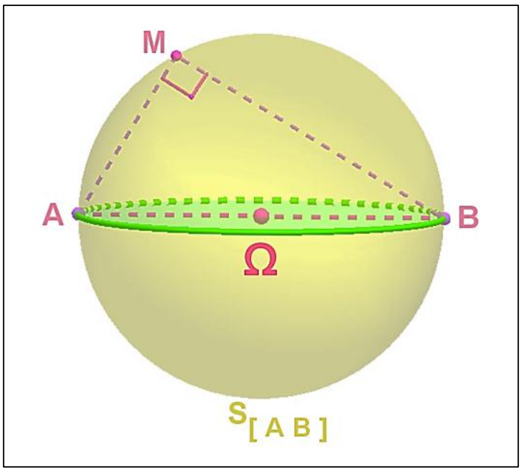
on a : $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$.

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0),1)$ est $x^2+y^2+z^2=1$.

03. Equation cartésienne du sphère déterminé par un diamètre $[AB]$.

a. Définition :

Ω est le milieu de $[AB]$; $[AB]$ est un diamètre du sphère (S) .
donc A et B appartiennent à (S) .
On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$.



b. Propriété :

Equation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

ou bien $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$.

c. Preuve :

Soit I le milieu de $[AB]$ (centre du sphère (S) .

On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$$

$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}.(-\overrightarrow{IA})=0$$

$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}.\vec{0}-IA^2=0$$

$$\Leftrightarrow MI^2=IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI=IA$$

$$\Leftrightarrow M\in S_{(I,r=IA)}$$

Conclusion : l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ c'est le sphère (S) de centre I le milieu de $[AB]$ et de rayon $r=IA=\frac{AB}{2}$ ou encore le sphère $S_{[AB]}$ de diamètre $[AB]$.

d. Exemple : Soient $A(0,1,0)$ et $B(0,-1,0)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$.

On détermine l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$:

$M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$; $\left(\text{ou } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$ est $S_{[AB]} : x^2+y^2+z^2=1$.

04. L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$:

a. Propriété :

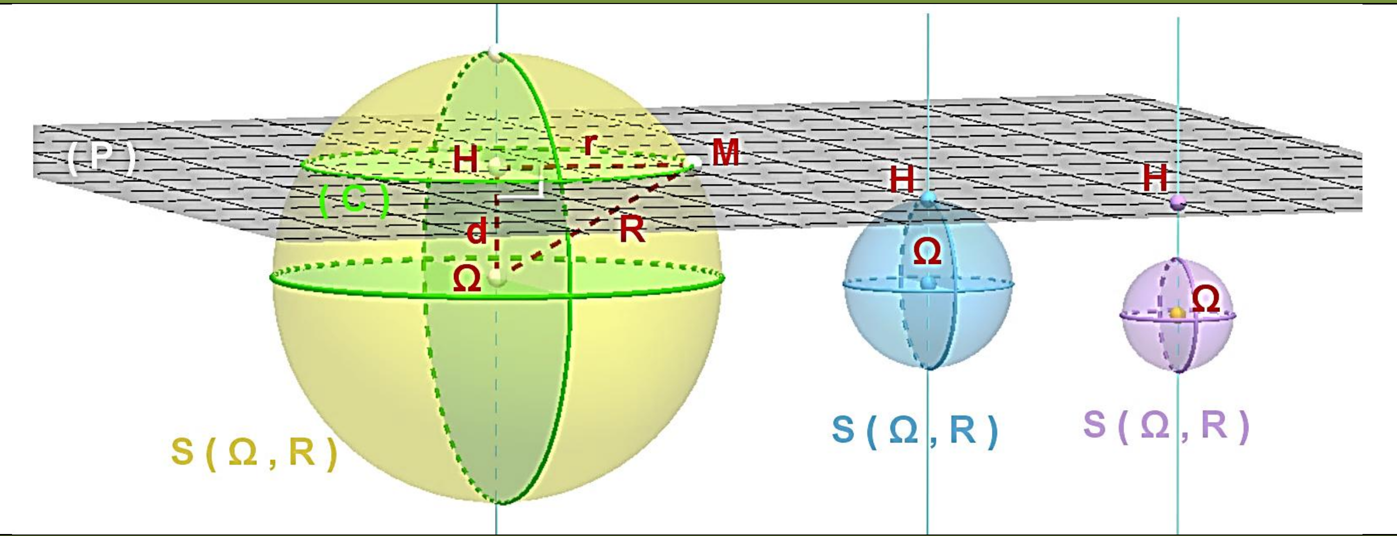
L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avec a et b et c et d de $\mathbb{R}$ on pose $A=a^2+b^2+c^2-4d$ est :

- $(E)=\varnothing$ si $A<0$.
- $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ si $A=0$.
- Le Sphère $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{A}}{2}\right)$ si $A>0$.

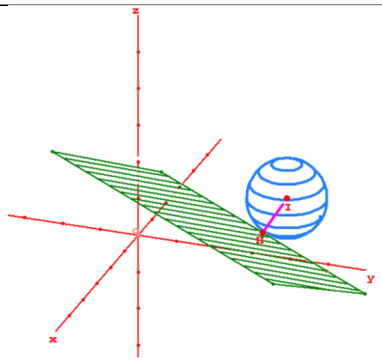
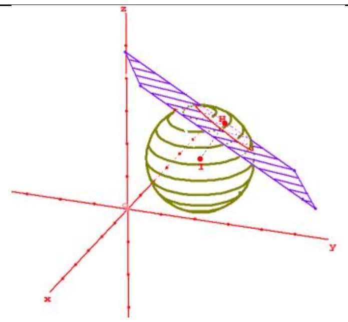
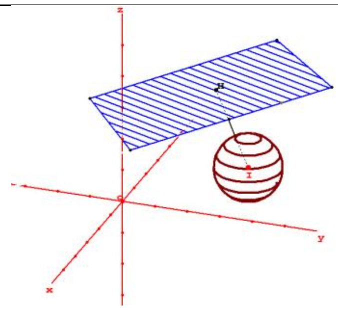
IX. Positions relatives d'une sphère et un plan :

01. Positions et les schémas et théorème:

a. Intersection d'un plan (P) et une sphère (S)



b. Théorème :

$3^{\text{ième}}$ CAS : $d=\Omega H<R$ on a $(P)\cap(S)=(C)$ (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H et de rayon $R_C=\sqrt{R_S{}^2-d^2}$ $R_C=r$ et $R_S=R$	$2^{\text{ième}}$ CAS : $d=\Omega H=R$ on a $(P)\cap(S)=\{H\}$ (P) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(P)$	1^{ER} CAS : $d=\Omega H>R$ on a $(P)\cap(S)=\varnothing$ (P) et (S) son disjoints
		

a. Remarques :

- H est la projection de Ω sur (P) et $d=\Omega H=d(\Omega,(P))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- on détermine H par l'intersection du plan (P) et la droite (D) perpendiculaire au plan passant par Ω
- Vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) est un vecteur directeur de la droite (D) .

02. Equation du plan tangent à une sphère :

a. Théorème :

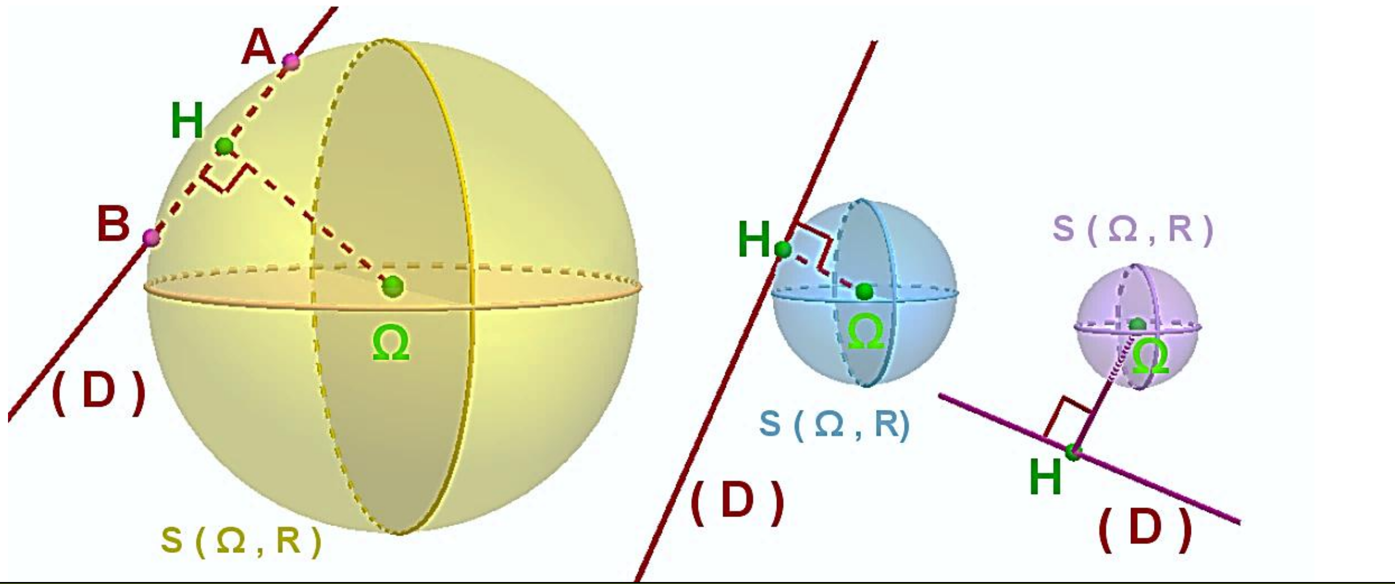
par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A . l'équation de (Q) est : $M\in(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

X. Positions relatives d'une sphère et une droite :

01. Positions et les schémas et théorème :

a. Intersection d'une droite (D) et une sphère (S)

3ième CAS :	2ième CAS	1ER CAS :



b. théorème

3ième CAS : $(D)\cap(S)=\{A,B\}$	2ième CAS / $(D)\cap(S)=\{H\}$	1ER CAS : $(D)\cap(S)=\varnothing$
(D) coupe (S) en deux points A et B (Deux points mais pas le segment $[AB]$)	(D) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(D)$	(P) et (S) son disjoints
CONDITION : $d=\Omega H<R$	CONDITION : $d=\Omega H=R$	CONDITION : $d=\Omega H>R$

REMARQUES

- H est la projection de Ω sur (D) .
- Si $(D)=D(K,\vec{u})$ on a $d=\Omega H=\dfrac{\left\|\overrightarrow{K\Omega}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ (voir chapitre produit vectoriel) .
- Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

  on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

$$=\Delta_x\vec{i}-\Delta_y\vec{j}+\Delta_z\vec{k}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

- Exemple : $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$